

# Anwendung der modifizierten Watson-Transformation auf die Greensche Dyade für die Beugung an der Kugel\*

Von PETER BECKMANN

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Münster  
(Z. Naturforsch. 12 a, 960—967 [1957]; eingegangen am 9. September 1957)

Die Anwendung der WATSON-Transformation auf die Zylinderfunktionsreihen der GREENSchen Dyade liefert komplexe Integrale in der Indexebene. Geometrisch-optische Anteile ergeben sich asymptotisch als Beiträge von Sattelpunkten. Die gebeugten Wellen werden als Kriechwellen durch Residuensummen dargestellt.

In einer früheren Arbeit<sup>1</sup> wurde die Beugung am Zylinder endlicher Leitfähigkeit mittels einer modifizierten WATSON-Transformation untersucht. Hierbei stellten sich Wellen, welche Strahlen der geometrischen Optik entsprechen, als Sattelpunktsbeiträge dar; Residuensummen ergaben Kriechwellen.

In der vorliegenden Untersuchung soll zunächst gezeigt werden, daß das für die Beugung am Zylinder angewandte Verfahren prinzipiell auch bei der Behandlung der Beugung an der Kugel verwandt werden kann. Während beim Zylinder jedoch durch

die Zylinderachse eine bestimmte Richtung ausgezeichnet ist und die gebeugte Welle bei beliebiger Polarisation durch die Überlagerung von zwei Wellen mit spezieller Polarisation ( $\mathfrak{E}$  parallel Zylinderachse und  $\mathfrak{H}$  parallel Zylinderachse) gewonnen werden kann, ist eine solche einfache Darstellung für die Kugel nicht möglich. Man gewinnt das Beugungsfeld der Kugel dadurch, daß man das vektorielle Dipolmoment der Primärquelle skalar mit der GREENSchen Dyade des Beugungsproblems multipliziert.

Nach FRANZ<sup>2</sup> läßt sich diese Dyade darstellen in der Form

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu}{k^2} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \frac{\partial}{\partial r'} \times (\mathbf{r} \times \nabla) V_1 + \mu (\mathbf{r} \times \nabla) (\mathbf{r} \times \nabla) V_2 \quad (1)$$

$$\text{mit } V_1 = \frac{-i}{16 \sqrt{r r'}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} H_{n+1/2}^{(1)}(k r') \left\{ H_{n+1/2}^{(2)}(k r) - R_{n+1/2} \frac{H_{n+1/2}^{(2)}(k a)}{H_{n+1/2}^{(1)}(k a)} H_{n+1/2}^{(1)}(k r) \right\} P_n(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}'), \quad (2)$$

$$R_n = \log' [\sqrt{k a} H_n^{(2)}(k a)] - \mathfrak{Z}_i / \mathfrak{Z}_a \log' [\sqrt{k_i a} J_n(k_i a)] / \log' [\sqrt{k a} H_n^{(1)}(k a)] - \mathfrak{Z}_i / \mathfrak{Z}_a \log' [\sqrt{k_i a} J_n(k_i a)]; \quad (3)$$

$V_2$ : ersetze  $R_n$  durch  $\bar{R}_n$  ( $= R_n$  mit  $\mathfrak{Z}_a / \mathfrak{Z}_i$  anstatt  $\mathfrak{Z}_i / \mathfrak{Z}_a$ );  $r' \geq r \geq a$ ,  $\mathbf{e} = \mathbf{r}/r$ .

$a$  ist der Radius der Kugel,  $k$  und  $\mathfrak{Z}_a$  sind Wellenzahl und Wellenwiderstand im Außenraum,  $k_i$  und  $\mathfrak{Z}_i$  im Innenraum.  $\log' [\sqrt{x} Z_n(x)]$  steht für  $\frac{1}{2x} + \frac{Z_n'(x)}{Z_n(x)}$ .

Führt man die Differentiationen  $(\mathbf{r} \times \nabla)$  in Gl. (1) teilweise aus und berücksichtigt die Beziehung

$$\frac{d}{dx} P_n(x) = \frac{n(n+1)}{\sqrt{1-x^2}} P_n^{-1}(x), \quad (4)$$

so erhält man eine Darstellung, welche den Nenner  $n(n+1)$ , der die Durchführung der modifizierten WATSON-Transformation stört, nicht mehr enthält:

$$\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu}{k^2} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \frac{\partial}{\partial r'} \times \frac{\mathbf{e} \times \mathbf{e}'}{|\mathbf{e} \times \mathbf{e}'|} \bar{V}_1 + \mu (\mathbf{r} \times \nabla) \frac{(\mathbf{e} \times \mathbf{e}')}{|\mathbf{e} \times \mathbf{e}'|} \bar{V}_2, \quad (5)$$

$$\bar{V}_1 = \frac{-i}{16 \sqrt{r r'}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) H_{n+1/2}^{(1)}(k r') \left\{ H_{n+1/2}^{(2)}(k r) - R_{n+1/2} \frac{H_{n+1/2}^{(2)}(k a)}{H_{n+1/2}^{(1)}(k a)} H_{n+1/2}^{(1)}(k r) \right\} P_n^{-1}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}'), \quad (6)$$

$\bar{V}_2$ : ersetze  $R_{n+1/2}$  durch  $\bar{R}_{n+1/2}$ .

\* Auszug aus der Dissertation, Münster 1957.

<sup>1</sup> P. BECKMANN u. W. FRANZ, Über die GREENSche Funktion transparenter Zylinder, Z. Naturforsch. 12 a, 257 [1957].

<sup>2</sup> W. FRANZ, Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen, Erg. Angew. Math. Band 4, Springer-Verlag, Berlin 1957, S. 59.



Für die Durchführung der WATSON-Transformation ist es einfacher, Reihen zu benutzen, welche bei  $n=0$  beginnen. Wir führen daher die Funktionen  $G_1$  und  $G_2$  ein durch:

$$G_1 = \bar{V}_1 - \frac{i}{16 \sqrt{r r'}} P_0^{-1} (\epsilon \cdot \epsilon') H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(k r') \cdot \left\{ H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(k r) - R_{1/2} \frac{H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(k a)}{H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(k a)} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(k r) \right\}, \quad (7)$$

$G_2$ : ersetze  $R_{1/2}$  durch  $\bar{R}_{1/2}$ ,  $\bar{V}_1$  durch  $\bar{V}_2$ .

### 1. Durchführung der Watson-Transformation

Da die Zylinderfunktionsreihen für  $G_1$  und  $G_2$  bereits für mäßig große  $ka$  schlecht konvergieren, verwandeln wir sie nach WATSON<sup>3</sup> in komplexe In-

tegrale. Wir erhalten so für  $G_1$

$$G_1 = \frac{1}{16 \sqrt{r r'}} \int_C d\nu \frac{\nu P_{\nu-1/2}^{-1}(\epsilon \cdot \epsilon')}{\cos \nu \pi} H_{\nu}^{(1)}(k r') \cdot \left\{ H_{\nu}^{(2)}(k r) - R_{\nu} \frac{H_{\nu}^{(2)}(k a)}{H_{\nu}^{(1)}(k a)} H_{\nu}^{(1)}(k r) \right\}. \quad (8)$$

Da die folgende Rechnung für  $G_2$  genau so verläuft wie für  $G_1$ , können wir uns auf die Behandlung von Gl. (8) beschränken. Der Weg C umschließt die gesamte positiv reelle  $\nu$ -Achse in mathematisch negativem Sinne (vgl. Abb. 1). Den Weg C deformieren

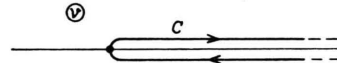


Abb. 1. Integrationsweg für Integraldarstellung (8).

wir in den Weg D, welcher von  $\nu = -i\infty$  nach Null verläuft und von dort in geringem Abstand unterhalb der Kurve, auf welcher

$$\frac{H_{\nu}^{(1)}(k_i a) \log' [\sqrt{k a} H_{\nu}^{(1)}(k a)] - \Im i / \Im a \log' [\sqrt{k_i a} H_{\nu}^{(1)}(k_i a)]}{H_{\nu}^{(2)}(k_i a) \log' [\sqrt{k a} H_{\nu}^{(1)}(k a)] - \Im i / \Im a \log' [\sqrt{k_i a} H_{\nu}^{(2)}(k_i a)]} \quad (9)$$

den Betrag Eins annimmt, nach  $\nu = +\infty$ . Für die Wahl des Weges gelten die gleichen Überlegungen wie im Falle der Beugung am Zylinder<sup>1</sup>. Auf dem Wege D dürfen wir den Koeffizienten  $R_{\nu}$  entwickeln und erhalten so:

$$G_1 = G_{1P} + \sum_{l=0}^{\infty} G_{1l}, \quad (10)$$

$$G_{1P} = \frac{1}{16 \sqrt{r r'}} d\nu \int_D \frac{\nu P_{\nu-1/2}^{-1}(-\epsilon \cdot \epsilon')}{\cos \nu \pi} H_{\nu}^{(1)}(k r') \cdot \left\{ H_{\nu}^{(2)}(k r) - R_{12} \frac{H_{\nu}^{(2)}(k a)}{H_{\nu}^{(1)}(k a)} H_{\nu}^{(1)}(k r) \right\} \quad (10 a)$$

$$G_{1l} = \frac{1}{16 \sqrt{r r'}} \int_D d\nu \frac{\nu P_{\nu-1/2}^{-1}(-\epsilon \cdot \epsilon')}{\cos \nu \pi} H_{\nu}^{(1)}(k r') H_{\nu}^{(1)}(k r) \frac{H_{\nu}^{(2)}(k a)}{H_{\nu}^{(1)}(k a)} \frac{H_{\nu}^{(1)}(k_i a)}{H_{\nu}^{(2)}(k_i a)} T_{12} T_{21} \left[ \frac{H_{\nu}^{(2)}(k_i a)}{H_{\nu}^{(1)}(k_i a)} R_{21} \right]^l. \quad (10 b)$$

Die Koeffizienten  $R$  und  $T$  haben die Bedeutung:

$$R_{12} = \frac{\log' [\sqrt{k a} H_{\nu}^{(2)}(k a)] - \Im i / \Im a \log' [\sqrt{k_i a} H_{\nu}^{(2)}(k_i a)]}{\log' [\sqrt{k a} H_{\nu}^{(1)}(k a)] - \Im i / \Im a \log' [\sqrt{k_i a} H_{\nu}^{(2)}(k_i a)]}, \quad (11 a)$$

$$T_{12} = 1 - R_{12}, \quad (11 b)$$

$$R_{21} = - \frac{\log' [\sqrt{k a} H_{\nu}^{(1)}(k a)] - \Im i / \Im a \log' [\sqrt{k_i a} H_{\nu}^{(1)}(k_i a)]}{\log' [\sqrt{k a} H_{\nu}^{(1)}(k a)] - \Im i / \Im a \log' [\sqrt{k_i a} H_{\nu}^{(2)}(k_i a)]}, \quad (11 c)$$

$$T_{21} = 1 + R_{21}. \quad (11 d)$$

Das Integral für  $G_{1P}$  deformieren wir in einen Umlauf  $D_2$  um die in der Umgebung der Nullstellen von  $H_{\nu}^{(1)}(k a)$  im ersten Quadranten gelegenen Pole

von  $R_{12}$  (diese seien im folgenden stets mit  $\nu_p$  bezeichnet), sowie in einen zum Nullpunkt symmetrischen Integrationsweg von  $\nu = -i\infty$  nach  $\nu = +i\infty$ . Das Integral über den Weg von  $-i\infty$  nach  $+i\infty$  liefert keinen Beitrag, da der Integrand eine ungerade Funktion von  $\nu$  ist. Der Umlauf um die Pole läßt sich im geometrischen Schatten durch eine rasch konvergente Residuensumme auswerten. Im Lichtgebiet ist mit der Beziehung

$$P_{\nu-1/2}^{-1}(-\epsilon \cdot \epsilon') = e^{i\pi(\nu-1/2)} P_{\nu-1/2}^{-1}(\epsilon \cdot \epsilon') - 2i \cos \nu \pi {}^{(2)}Q_{\nu-1/2}^{-1}(\epsilon \cdot \epsilon') \quad (12)$$

<sup>3</sup> G. N. WATSON, Proc. Roy. Soc., Lond. A 95, 83 [1919].

der Integrand aufzuspalten. Das Integral mit  $^{(2)}Q_{\nu-1/2}^{-1}(\epsilon \cdot \epsilon')$  läßt eine Sattelpunktsauswertung zu und ergibt von einem Sattelpunkt  $\nu_s$  mit

$$0 \leq \Re(\nu_s) \leq ka$$

die reflektierte Welle und von einem Sattelpunkt mit  $\Re(\nu_s) > ka$  die Primärwelle (vgl. FRANZ und BECKMANN<sup>4</sup>). Das Integral mit  $P_{\nu-1/2}^{-1}(\epsilon \cdot \epsilon')$  läßt sich jetzt in eine rasch konvergente Residuensumme verwandeln, welche die Reflexions-Kriechwellen des geometrischen Lichtgebietes liefert. Auf die ausführliche Durchführung der Rechnung kann verzichtet werden, da sie ganz analog zum Falle der Beugung am Zylinder verläuft.

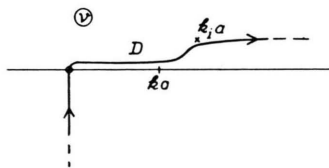


Abb. 2. Integrationsweg für die Entwicklung nach Regenbögen.

Für die Auswertung von  $G_{1l}$  entwickeln wir  $1/\cos \nu \pi$  nach Potenzen von  $e^{i2\pi\nu}$  bis zu einer bestimmten Potenz  $e^{i2\pi\nu M}$ . Der Wert von  $M$  soll im folgenden bestimmt werden. Für das Verhalten des Integranden von  $G_{1l}$  ist im wesentlichen die Funktion

$$H_{\nu}^{(1)}(kr) H_{\nu}^{(1)}(kr') \frac{H_{\nu}^{(2)}(ka) H_{\nu}^{(1)}(k_1 a)}{H_{\nu}^{(1)}(ka) H_{\nu}^{(2)}(k_1 a)} \left[ \frac{H_{\nu}^{(1)}(k_1 a)}{H_{\nu}^{(2)}(k_1 a)} \right]^l \quad (13)$$

maßgebend. Für die Bestimmung von Sattelpunkten sowie für die Abschätzung von Konvergenzen im Unendlichen wird man die restlichen Teile des Integranden von Gl. (10 b) in Summanden zerlegen, welche exponentielles Verhalten zeigen, etwa der Art  $e^{i\nu\psi}$ . Die Gleichung zur Bestimmung der Sattelpunkte lautet nun asymptotisch:

$$\psi = \arccos \frac{\nu}{kr'} + \arccos \frac{\nu}{kr} - 2 \arccos \frac{\nu}{ka} + 2(l+1) \arccos \frac{\nu}{k_1 a} \quad (14)$$

Will man einen Teil des Integrals Gl. (10 b) in eine Residuensumme über die Pole  $\nu_p$  verwandeln (die Pole von  $R_{12}$  sind zugleich Pole von  $T_{12}$ ,  $R_{21}$  und  $T_{21}$ ), so muß der Faktor  $e^{i\nu\psi}$  das exponentielle An-

wachsen von Gl. (13) kompensieren, d. h. asymptotisch muß gelten

$$\psi > \arccos \frac{a}{r'} + \arccos \frac{a}{r} + 2(l+1) \arccos \frac{k}{k_1} \quad (15)$$

Auf der imaginären  $\nu$ -Achse verhält sich Gl. (13) wie  $e^{i\nu(l+1)\pi}$ . (16)

Hier bestimmt also ebenfalls die Größe von  $\psi$ , ob der Integrand für  $\nu = +i\infty$  oder  $\nu = -i\infty$  exponentiell klein wird.

Wir sehen, daß für die weitere Behandlung von  $G_{1l}$  die relative Größenordnung von  $\psi$  und

$$\Phi \equiv \arccos \frac{\nu}{kr'} + \arccos \frac{\nu}{kr} - 2 \arccos \frac{\nu}{ka} + 2(l+1) \arccos \frac{\nu}{k_1 a} \quad (17)$$

maßgebend ist. In Abb. 3 ist der Verlauf von  $\Phi$  für  $\nu$  auf der reellen Achse  $0 \leq \nu \leq ka$  ( $k_1$  reell) schematisch dargestellt. Ist  $\psi$  größer als  $\Phi_1$ , so wird der

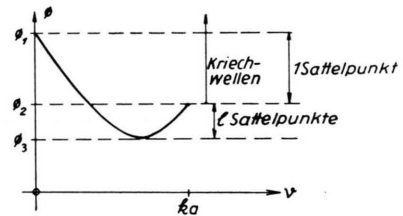


Abb. 3. Schematischer Verlauf der Funktion (17); zur Bestimmung der verschiedenen Arten von Regenbogenbeiträgen. In der Abb. muß es 2 statt  $l$  Sattelpunkte heißen.

Integrand für  $\nu = +i\infty$  exponentiell klein, und der Weg D kann nach  $+i\infty$  gezogen werden. Hierbei bleibt er an den Polen  $\nu_p$  hängen. Der Umlauf um die Pole kann aber durch eine Residuensumme ausgewertet werden, da  $\psi$  auch größer als  $\Phi_2$  ist und daher die Residuensumme rasch konvergiert. Liegt  $\psi$  zwischen  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$ , so konvergiert das Integral zwar nicht mehr für  $\nu = +i\infty$ , der Integrationsweg kann jedoch in das zwischen der positiv imaginären Achse und der Polstellenreihe gelegene Tal des Integranden, welches wir im folgenden mit T bezeichnen wollen, gezogen werden. Da  $\psi > \Phi_2$  ist, liefert der Umlauf um die Polstellen eine rasch konvergente Residuenreihe. Der Weg von  $-i\infty$  nach T führt über einen Sattelpunkt auf der reellen Achse (vgl. Abb. 4).

Liegt  $\psi$  zwischen  $\Phi_2$  und  $\Phi_3$ , so kann der Weg ebenfalls nach T gezogen werden, der Umlauf um die Polstellenreihe aber nicht mehr durch eine brauchbare Residuensumme ausgewertet werden. Jetzt hat

<sup>4</sup> W. FRANZ u. P. BECKMANN, Instn. Radio Engrs, Trans. AP 4, 203 [1956].

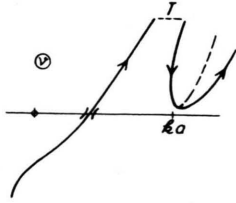


Abb. 4. Schematischer Verlauf des Integrationsweges für einen Teil des Beitrages  $G_{11}$ .

die Sattelpunktsgleichung (14) aber zwei Lösungen (vgl. Abb. 3). Der Integrationsweg führt daher von  $-i\infty$  nach T über den ersten Sattelpunkt  $\nu_1$  und von dort über den zweiten Sattelpunkt  $\nu_2$  in die negativ imaginäre Halbebene zurück. Von dort kann er nach  $\nu = +\infty$  geführt werden (vgl. Abb. 5). Hierbei überschrittene Sattelpunkte liefern stärker als exponentiell kleine Beiträge, da der Faktor  $T_{12}$  für  $\Re(\nu_s) > ka$  stärker als exponentiell klein wird.

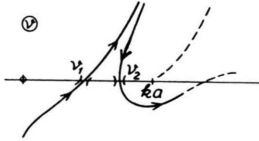


Abb. 5. Schematischer Verlauf des Integrationsweges für einen Teil des Beitrages  $G_{11}$ .

Nimmt  $\psi$  weiter ab, so nähern sich die beiden Sattelpunkte, um bei  $\psi = \Phi_3$  zu einem Dreifachsattel zu verschmelzen. Für  $\psi < \Phi_3$  löst sich dieser Dreifachsattel wieder in zwei Sattelpunkten auf, welche in der positiv bzw. negativ imaginären Halbebene liegen. Jetzt ist der Integrationsweg von  $-i\infty$  über den in der negativ imaginären Halbebene gelegenen Sattelpunkt zu führen. Dieser liefert jedoch nur einen exponentiell kleinen Beitrag.

Die tatsächliche Bestimmung von  $M$  ist verschieden, je nachdem ob  $l$  eine gerade oder ungerade Zahl ist. Zunächst betrachten wir  $l$  ungerade  $= 2n + 1$ . Wir entwickeln  $1/\cos \nu \pi$  in Gl. (10 b) bis zur Potenz  $n$ :

$$\frac{1}{\cos \nu \pi} = 2 e^{i \nu \pi} \sum_{m=0}^n (-1)^m e^{i \nu 2 m \pi} + \frac{(-1)^{n+1} e^{i \nu 2(n+1) \pi}}{\cos \nu \pi} \quad (18)$$

und untersuchen das letzte Glied in Gl. (18). Der Faktor  $\exp\{i \nu 2(n+1) \pi\}$  kompensiert gerade das exponentielle Anwachsen von Gl. (13) auf der positiv imaginären Achse. Da jedoch  $P_{\nu-1/2}^{-1}(-e \cdot e')/\cos \nu \pi$  für  $|e \cdot e'| < 1$  auf der positiv imaginären Achse ex-

ponentiell klein wird, kann der Integrationsweg für dieses Glied nach  $\nu = +i\infty$  gezogen werden. Dabei bleibt er an den Polen  $\nu_P$  hängen. Der Umlauf um die Pole kann jedoch in eine rasch konvergente Residuensumme verwandelt werden. Diese liefert genau die  $(n+1)$ -mal um die Kugel gekrochenen Kriechwellen, welche das Innere der Kugel  $(l+1)$ -mal durchquert haben. Das verbleibende Integral von  $-i\infty$  nach  $+i\infty$  liefert keinen Beitrag, da der Integrand eine ungerade Funktion von  $\nu$  ist. Für die Auswertung der Reihenglieder in Gl. (18) zerlegt man  $P_{\nu-1/2}^{-1}(-e \cdot e')$  in Kugelfunktionen zweiter Art:

$$P_{\nu-1/2}^{-1}(-\cos \vartheta) = {}^{(1)}Q_{\nu-1/2}^{-1}(-\cos \vartheta) + {}^{(2)}Q_{\nu-1/2}^{-1}(-\cos \vartheta) \quad (19)$$

$$(e \cdot e' = \cos \vartheta).$$

Das exponentielle Verhalten von  ${}^{(2)}Q_{\nu-1/2}^{-1}$  für große  $\nu$  wird asymptotisch beschrieben durch

$${}^{(2)}Q_{\nu-1/2}^{-1}(\cos \vartheta) \sim e^{\mp i \nu \vartheta}. \quad (20)$$

Es liefern alle Reihenglieder aus Gl. (18) in Gl. (10 b) mit

$$\frac{\vartheta}{2\pi - \vartheta} + 2m\pi > \Phi_2 \quad (21)$$

Residuensummen aus Umläufen um die Pole  $\nu_P$  und damit die Kriechwellen, welche weniger als  $(n+1)$ -mal um die Kugel gekrochen sind, sowie je einen Sattelpunktsbeitrag, welcher einem Strahl der geometrischen Optik entspricht, der das Innere der Kugel  $(l+1)$ -mal auf einer Sehne durchquert hat. Gilt

$$\Phi_2 > \frac{\vartheta}{2\pi - \vartheta} + 2m\pi > \Phi_3, \quad (22)$$

so liefern die Integrale jeweils Beiträge von zwei Sattelpunkten. Für

$$\frac{\vartheta}{2\pi - \vartheta} + 2m\pi < \Phi_3 \quad (23)$$

liefern die Integrale nur exponentiell kleine Beiträge von Sattelpunkten in der negativ imaginären Halbebene.

Ist  $l$  gerade  $= 2n$ , so entwickeln wir  $1/\cos \nu \pi$  in Gl. (10 b) nur bis zur Potenz  $(n-1)$

$$\frac{1}{\cos \nu \pi} = 2 e^{i \nu \pi} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m e^{i \nu 2 m \pi} + \frac{(-1)^n e^{i \nu 2 n \pi}}{\cos \nu \pi}. \quad (24)$$

Das Integral, welches den letzten Ausdruck in Gl. (24) enthält, konvergiert nicht mehr bei  $\nu = +i\infty$ . Da-

her ziehen wir seinen Weg in das Tal T und erhalten so einen Umlauf um die Pole  $\nu_P$  und ein Integral von  $\nu = -i\infty$  nach T. Den Umlauf um die Pole  $\nu_P$  können wir direkt durch eine Residuensumme auswerten, welche die  $n$ -fach um die Kugel gekrochenen Kriechwellen, die das Innere der Kugel  $(l+1)$ -mal durchquert haben, liefert. Auf dem Wege von  $-i\infty$  nach T benutzen wir die Aufspaltung Gl. (12) und erhalten so Integranden mit den Winkelabhängigkeiten

$$\frac{1}{\cos \nu \pi} \left\{ i e^{i\nu(2n+1)\pi} P_{\nu-1/2}^{-1}(\epsilon \cdot \epsilon') - 2i \cos \nu \pi e^{i\nu 2n\pi} Q_{\nu-1/2}^{-1}(\epsilon \cdot \epsilon') \right\}. \quad (25)$$

Den Integrationsweg des Integrals mit dem ersten Glied in Gl. (25) können wir in das Tal des Integranden zwischen der Polstellenreihe im 3. Quadranten und der negativ imaginären Achse verlegen, erhalten so einen zum Nullpunkt symmetrischen Weg, der aber keinen Beitrag liefert, da der Integrand eine ungerade Funktion von  $\nu$  ist. Das Integral mit dem zweiten Glied in Gl. (25) besitzt nicht mehr den Nenner  $1/\cos \nu \pi$  und kann nach der Sattelpunktmethode ausgewertet werden. Die Behandlung der Summenglieder in Gl. (24) erfolgt genau wie bei ungeraden Werten von  $n$ .

## 2. Asymptotische Auswertung

Werden die Integrationswege von Gl. (10) wie in Abschnitt 1 angegeben umgeformt, so lassen sich die Integrale leicht asymptotisch auswerten, wenn 1. Auf- und Quellpunkt weiter als  $3(ka)^{1/3}$  von der Kugeloberfläche entfernt sind, 2.  $|k_i/k| > 1 + 3(ka)^{-2/3}$  ist, 3. die auftretenden Sattelpunkte  $\nu_s$  weiter als  $3(ka)^{1/3}$  von  $\nu = ka$  entfernt liegen, 4.  $|\nu_s| \gg 1$  ist. Die beiden letzten Bedingungen bedeuten, daß der Aufpunkt nicht allzu nahe an die Schattengrenze, eine Grenze der Totalreflexion oder an den Zentralstrahl rücken darf.

### A) Geometrisch-optische Beiträge von Sattelpunkten

Sind die oben aufgeführten Bedingungen erfüllt, so können wir die in Gl. (10) auftretenden Zylinder- bzw. Kugelfunktionen durch ihre asymptotischen Darstellungen für große Werte von  $\nu$  ersetzen:

$$H_{\nu}^{(2)}(\varrho) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} (\varrho^2 - \nu^2)^{1/4} \exp \left[ \pm i \left( \sqrt{\varrho^2 - \nu^2} - \nu \arccos \frac{\nu}{\varrho} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \quad (26)$$

$$P_{\nu-1/2}^{-1}(\cos \vartheta) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\nu \sqrt{\nu \sin \vartheta}} \cos \left( \nu \vartheta - \frac{3\pi}{4} \right), \quad (27a)$$

$$Q_{\nu-1/2}^{-1}(\cos \vartheta) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp[\mp i(\nu \vartheta - [3\pi/4])] }{\nu \sqrt{\nu \sin \vartheta}}. \quad (27b)$$

Für die folgende Rechnung empfiehlt es sich, einige Abkürzungen einzuführen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \arccos \frac{\nu_s}{kr}, & \alpha_2 &= \arccos \frac{\nu_s}{kr'}, \\ \alpha_3 &= \arccos \frac{\nu_s}{ka}, & \alpha_4 &= \arccos \frac{\nu_s}{k_1 a}. \end{aligned} \quad (28)$$

### I. Reflektierte Welle

Die Gleichung zur Bestimmung des Sattelpunktes lautet:

$$\vartheta = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3.$$

Die Lösungen dieser Gleichung können z. B. dadurch bestimmt werden, daß man die Funktion  $\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$  für  $0 < \nu_s < ka$  bei gegebenem Abstand des Quell- und Aufpunktes vom Kugelmittelpunkt ausrechnet und die Lösung von Gl. (29) für die verschiedenen Werte von  $\vartheta$  numerisch bestimmt. Man erhält so asymptotisch für die reflektierte Welle:

$$G_{1P}^g \sim \frac{i}{4\pi} \frac{\exp\{i[kr \sin \alpha_1 + r' \sin \alpha_2 - 2a \sin \alpha_3]\}}{kr r' \{ka \cos \alpha_3 \sin \vartheta \sin \alpha_1 \sin \alpha_2\}^{1/2}} \cdot \frac{1}{\left\{ \frac{2}{ka \sin \alpha_3} - \frac{1}{kr \sin \alpha_1} - \frac{1}{kr' \sin \alpha_2} \right\}^{1/2}} \cdot \frac{\sin \alpha_3 - \beta_i / \beta_a \sin \alpha_4}{\sin \alpha_3 + \beta_i / \beta_a \sin \alpha_4}. \quad (30)$$

### II. Regenbögen

Die geometrisch-optischen Beiträge einer Welle, welche im Innern der Kugel  $l$ -mal reflektiert wurde ( $l=0$  Linsenterm), stellen sich nach der Aufspaltung Gl. (18) bzw. Gl. (24) dar durch eine Reihe:

$$G_{1l}^g = \sum_m G_{1l,m}^g. \quad (31)$$

Die Sattelpunkte bestimmen sich aus

$$\left. \begin{aligned} \vartheta \\ 2\pi - \vartheta \end{aligned} \right\} + 2m\pi = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 + 2(l+1)\alpha_4, \quad (32)$$

$0 \leq m \leq n$  für  $l=2n$  und  $l=2n+1$ .

In Gl. (32) entspricht der Wert  $\vartheta$  dem in  $P_{\nu-1/2}^{-1}(-\cos \vartheta)$  enthaltenen Anteil  $^{(1)}Q_{\nu-1/2}^{-1}$  und der Wert  $2\pi - \vartheta$  dem Anteil  $^{(2)}Q_{\nu-1/2}^{-1}$ . Die Lösungen von Gl. (32) kann man wiederum dadurch bestimmen, daß man die Funktion

$$\Phi_l = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 + 2(l+1)\alpha_4$$



für  $0 < \nu_s < ka$  ausrechnet und die Lösungen von Gl. (32) für die verschiedenen Werte von  $\frac{\vartheta}{2\pi - \vartheta} + m\pi$  numerisch bestimmt. Die zu diesen Lösungen gehörigen Winkel  $\alpha_i$  seien im folgenden durch einen oberen Index  $m$  gekennzeichnet ( $\alpha_i^{(m)}$ ). Besteht die Kugel aus absorbierendem Material, so besitzt der Brechungsindex und damit  $\alpha_4$  auf der reellen Achse einen Imaginärteil. In diesem Falle rechnet man

$$G_{1l,m}^g \sim \frac{(-1)^{m+1} e^{-i(\pi/4)} e^{\pm i(3\pi/4)} e^{i(\pi/2)(l+1)}}{\pi k r r' \{k a \cos \alpha_3^{(m)} \sin \vartheta \sin \alpha_1^{(m)} \sin \alpha_2^{(m)}\}^{1/2}} \cdot \exp \left\{ i k \left[ r \sin \alpha_1^{(m)} + r' \sin \alpha_2^{(m)} - 2 a \sin \alpha_3^{(m)} + 2 \frac{k_1}{k} (l+1) a \sin \alpha_4^{(m)} \right] \right\} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{k a \sin \alpha_3^{(m)}} - \frac{2(l+1)}{k_1 a \sin \alpha_4^{(m)}} - \frac{1}{k r \sin \alpha_1^{(m)}} - \frac{1}{k r' \sin \alpha_2^{(m)}} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\sin(\alpha_3^{(m)}) \mathfrak{J}_i / \mathfrak{J}_a \sin(\alpha_4^{(m)})}{\{\sin \alpha_3^{(m)} + \mathfrak{J}_i / \mathfrak{J}_a \sin \alpha_4^{(m)}\}^2} \left[ \frac{\sin \alpha_3^{(m)} - \mathfrak{J}_i / \mathfrak{J}_a \sin \alpha_4^{(m)}}{\sin \alpha_3^{(m)} + \mathfrak{J}_i / \mathfrak{J}_a \sin \alpha_4^{(m)}} \right]^l. \quad (33)$$

Der Wert  $\exp[+i(3\pi/4)]$  ist zu nehmen, wenn in Gl. (32) die Lösung mit  $\vartheta$  bestimmt wird, der Wert  $\exp[-i(3\pi/4)]$  für  $2\pi - \vartheta$ . Das eingeklammerte Minuszeichen  $(-)$  in Gl. (33) soll besagen, daß die Phase  $-\pi/2$  für die folgende Wurzel zu nehmen ist, wenn der Radikand negativ wird. Die Darstellung aller Sattelpunktsbeiträge in der Form Gl. (33) ist nicht mehr brauchbar, wenn der Aufpunkt in der Umgebung des extremal abgelenkten Strahles liegt.

die Funktion  $\Phi_1$  auch in der Umgebung der reellen  $\nu$ -Achse für kleine Werte von  $\Im m(\nu_s)$  aus und erhält so ein Relief von  $\Phi_1$ . Auf diesem bestimmt man dann die Lösungen von Gl. (32), d. h. die Punkte

$$\Im m(\Phi_1) = 0, \quad \Re e(\Phi_1) = \frac{\vartheta}{2\pi - \vartheta} + m\pi.$$

Jede der Lösungen von Gl. (32) liefert asymptotisch einen Beitrag  $G_{1l,m}^g$  der Gestalt

$$\frac{(-1)^m e^{\pm i(3\pi/4)} e^{i(\pi/2)(l+1)} 6^{1/3}}{2\pi \sqrt{2} \pi k r r' \{k a \cos \bar{\alpha}_3 \sin \bar{\vartheta} \sin \bar{\alpha}_1 \sin \bar{\alpha}_2\}^{1/2} F^{1/3}} \cdot A \left[ \Delta \vartheta \left( \frac{6}{F} \right)^{1/3} \right] \frac{\sin(\bar{\alpha}_4) \cdot \mathfrak{J}_i / \mathfrak{J}_a \sin \bar{\alpha}_4}{\{\sin \bar{\alpha}_3 + \mathfrak{J}_i / \mathfrak{J}_a \sin \bar{\alpha}_4\}} \left[ \frac{\sin \bar{\alpha}_3 - \mathfrak{J}_i / \mathfrak{J}_a \sin \bar{\alpha}_4}{\sin \bar{\alpha}_3 + \mathfrak{J}_i / \mathfrak{J}_a \sin \bar{\alpha}_4} \right]^l \cdot \exp \left\{ i k \left[ r \sin \bar{\alpha}_1 + r' \sin \bar{\alpha}_2 - 2 a \sin \bar{\alpha}_3 + 2 \frac{k_1}{k} (l+1) a \sin \bar{\alpha}_4 + a \cos \bar{\alpha}_3 \Delta \vartheta \right] \right\}; \quad (34)$$

$$F \equiv k a \cos \bar{\alpha}_3 \left\{ \frac{2}{[k a \sin \bar{\alpha}_3]^3} - \frac{2(l+1)}{[k_1 a \sin \bar{\alpha}_4]^3} - \frac{1}{[k r \sin \bar{\alpha}_1]^3} - \frac{1}{[k r' \sin \bar{\alpha}_2]^3} \right\}.$$

$A[\Delta \vartheta (6/F)^{1/3}]$  ist hierbei das AIRYSche Integral, welches durch BESSEL-Funktionen dargestellt werden kann:

$$A \left[ \Delta \vartheta \left( \frac{6}{F} \right)^{1/3} \right] = \frac{\pi}{\sqrt{27}} \left( \frac{6}{F} \right)^{1/6} \sqrt{\Delta \vartheta} \left\{ J_{-1/3} \left[ \frac{2}{\sqrt{27}} \left( \frac{6}{F} \right)^{1/2} (\Delta \vartheta)^{3/2} \right] + J_{1/3} \left[ \frac{2}{\sqrt{27}} \left( \frac{6}{F} \right)^{1/2} (\Delta \vartheta)^{3/2} \right] \right\}. \quad (35)$$

Die Beiträge aller übrigen Sattelpunkte, welche für  $\vartheta \rightarrow \bar{\vartheta}$  nicht zum Dreifachsattel verschmelzen, können durch Gl. (33) ausgedrückt werden.

### B) Kriechwellen

Für die asymptotische Darstellung der Kriechwellenbeiträge sind zunächst die Pole  $\nu_P$  zu bestimmen. Sie sind die Nullstellen des Nenners in Gl. (11)

und ergeben sich als Lösungen der Gleichung

$$\log' [\sqrt{k_i a} H_v^{(1)}(ka)] - (\mathfrak{J}_i / \mathfrak{J}_a)^{\pm 1} \log' [\sqrt{k_i a} H_v^{(2)}(k_i a)] = 0, \quad (36)$$

$\left( \frac{\mathfrak{J}_i}{\mathfrak{J}_a} \right)^{+1}$  für die Pole von  $G_1$ ;  
 $\left( \frac{\mathfrak{J}_i}{\mathfrak{J}_a} \right)^{-1}$  für die Pole von  $G_2$ .

Benutzt man die asymptotischen Formeln, so erhält man

$$\log' [\sqrt{k_i a} H_\nu^{(2)}(k_i a)] \sim -i \sqrt{1 - \frac{\nu^2}{(k_i a)^2}}. \quad (37)$$

Da nur die Nullstellen in der Umgebung von  $ka$  wesentlich zum Ergebnis beitragen, dürfen wir auf der rechten Seite in diesem Ausdruck  $\nu = ka$  setzen und erhalten

$$\log' [\sqrt{k_i a} H_\nu^{(2)}(k_i a)] \sim -i \sqrt{1 - \frac{k^2}{k_i^2}} = -i b. \quad (38)$$

Für  $H_\nu^{(1)}(ka)$  und seine Ableitung benutzen wir die asymptotische Darstellung durch das AIRY-Integral

$$\log' [\sqrt{k a} H_\nu^{(1)}(ka)] \sim -y \frac{A'(q)}{A(q)},$$

$$y = e^{-i(\pi/3)} \left( \frac{6}{ka} \right)^{1/3}, \quad q = y(\nu - ka). \quad (39)$$

Die Pole werden jetzt bestimmt durch

$$\frac{A(q_P)}{A'(q_P)} = \frac{1}{b} \left( \frac{\beta_i}{\beta_a} \right)^{\mp 1} e^{-i(\pi/2)} y, \quad \nu_P = ka + \frac{q_P}{y}. \quad (40)$$

Zur praktischen Berechnung der Pole führt man zunächst eine Funktion  $q(Q)$  ein.  $q$  ist die Umkehrfunktion von  $A(q)/A'(q) = Q$  und gehorcht der Differentialgleichung

$$\frac{dq}{dQ} = \frac{1}{1 + (q/3) Q^2}. \quad (41 a)$$

Nach Gl. (40) treten bei der asymptotischen Berechnung der Polstellen Werte von  $Q$  mit der Phase

$\arg(Q) = -\frac{5}{6}\pi - \gamma \mp \psi$ . Man wird daher die Differentialgleichung (41 a) für die in Frage kommenden Werte von  $\arg(Q)$  numerisch integrieren. Hierbei geht man zunächst von einer Stelle  $Q=0$  aus [d. h. von einer Nullstelle von  $A(q)$ ] und integriert bis  $|Q|=1$ . Dann führt man  $Q^{-1}$  als neue Variable ein und integriert die Differentialgleichung

$$\frac{dq}{dQ^{-1}} = \frac{-1}{(q/3) + Q^{-2}} \quad (41 b)$$

von  $Q^{-1}=0$  [d. h. einer Nullstelle von  $A'(q)$ ] bis  $|Q^{-1}|=1$ . Die so erhaltene Funktion  $q(Q)$  gestattet dann die Berechnung der Polstellen für die verschiedenen Werte von  $ka$ ,  $k_i a$ ,  $\beta_a$  und  $\beta_i$ . Die Pole stellen sich nun dar in der Form

$$\nu_P \sim ka + \left( \frac{ka}{6} \right)^{1/3} e^{i(\pi/3)} q_P, \quad q_P = q(Q_P), \quad Q_P = \delta,$$

$$y = \left( \frac{6}{ka} \right)^{1/3} e^{-i(\pi/3)}, \quad \delta = \frac{-iy}{(\beta_i/\beta_a) \sqrt{1 - (k^2/k_i^2)}}. \quad (42)$$

Hier wurden noch Glieder der relativen Größenordnung  $(ka)^{-1/3}$  berücksichtigt. Eine höhere Näherung, welche noch Glieder der Ordnung  $(ka)^{-2/3}$  enthält, ergibt sich, wenn man in Gl. (39) die Entwicklung von  $H_\nu^{(1)}(ka)$  und  $H_\nu^{(1)}(k_i a)$  noch weiter als bis zum ersten Glied durchführt.

Die an der Grenze des geometrischen Schattens entstehenden Kriechwellen, welche nicht in das Innere der Kugel eindringen, stellen sich nun asymptotisch dar in der Form

$$G_{1P}^{kr} \sim \frac{-e^{i(\pi/6)}}{2 \sqrt{2} \pi 6^{1/3}} \frac{\exp\{i k [(r^2 - a^2)^{1/2} + (r'^2 - a^2)^{1/2}]\}}{(ka)^{1/3} k r r' \sqrt{k a} \sin \vartheta \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/4} \left(1 - \frac{a^2}{r'^2}\right)^{1/4}} \quad (43)$$

$$\cdot \left\{ \frac{\beta_a^2}{\beta_i^2} \frac{n^2}{n^2 - 1} \right\} \cdot \sum_{\nu_P} \frac{e^{i \nu_P \vartheta + i(3\pi/4)} + e^{i \nu_P (2\pi - \vartheta) - i(3\pi/4)}}{1 + e^{i \nu_P 2\pi}} \cdot \frac{\exp \left\{ -i \nu_P \arccos \left[ \frac{a}{r} + \arccos \frac{a}{r'} \right] \right\}}{[A(q_P)]^2}, \quad (n = k_i/k)$$

für Aufpunkte im geometrischen Schatten. Im Lichtgebiet ist zu ersetzen

$$e^{i \nu_P \vartheta + i 3\pi/4} \quad \text{durch} \quad -e^{i \nu_P (2\pi + \vartheta) + i 3\pi/4}.$$

Für die Darstellung der Regenbogen-Kriechwellen bestimmt man zunächst die in Gl. (18) bzw. Gl. (24) auftretenden Minimalwerte von  $m$ , welche positive Kriechstrecken liefern. Für die in  $P_{\nu-1/2}^{-1}$  enthaltenen  $^{(1)}Q_{\nu-1/2}^{-1}$  und  $^{(2)}Q_{\nu-1/2}^{-1}$  erhält man zwei Werte von  $m$  aus

$$0 \leq \vartheta + 2 m_1 \pi - \arccos \frac{a}{r} - \arccos \frac{a}{r'} - 2(l+1) \arccos \frac{k}{k_i} < 2\pi,$$

$$0 \leq 2\pi - \vartheta + 2 m_2 \pi - \arccos \frac{a}{r} - \arccos \frac{a}{r'} - 2(l+1) \arccos \frac{k}{k_i} < 2\pi, \quad (44)$$

Die Kriechwellen, welche im Innern der Kugel  $l$ -mal reflektiert wurden, stellen sich nun asymptotisch dar in der Form (45):

$$\begin{aligned}
 G_{1l}^{\text{kr}} \sim & \frac{-\sqrt{2}\pi}{8(l+1)!} \frac{e^{i(\pi/6)}}{6^{1/2}(ka)^{1/2}} \frac{1}{(ka \sin \vartheta)^{1/2} k r r' \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{1/4} \left(1 - \frac{a^2}{r'^2}\right)^{1/4}} \\
 & \cdot \exp \left\{ i k \left[ (r^2 - a^2)^{1/2} + (r'^2 - a^2)^{1/2} + 2(l+1) a \left( \frac{k_1^2}{k^2} - 1 \right)^{1/2} \right] \right\} \cdot \left\{ \frac{\beta_a^2}{\beta_1^2} \frac{n^2}{n^2 - 1} \right\} \left\{ \frac{4 \beta_a^2 n^2}{\beta_1^2 (n^2 - 1)} \right\}^{\frac{l+1}{2}} \\
 & \cdot \sum_{\nu p} \left\{ \frac{\partial^{l+1}}{\partial \nu^{l+1}} \frac{\exp \left\{ -i \nu \left( \ar \cos \frac{a}{r} + \ar \cos \frac{a}{r'} + 2(l+1) \ar \cos \frac{k}{k_1} \right) \right\}}{[A(q)]^2 \cos \nu \pi} \right. \\
 & \cdot \left. \left[ \exp \left\{ i \nu (\vartheta - \pi) + i \left( \nu - \frac{1}{2} \right) 2 m_1 \pi + i \frac{3 \pi}{4} \right\} + \exp \left\{ i \nu (\pi - \vartheta) + i \left( \nu - \frac{1}{2} \right) 2 m_2 \pi - i \frac{3 \pi}{4} \right\} \right] \right\}_{l \nu = \nu p} \quad (n = k_i/k). \quad (45)
 \end{aligned}$$

Auch hier liefert  $l=0$  Beiträge des Linsenterms.

Der Verfasser ist Herrn Professor Dr. WALTER FRANZ für die Anregung und Förderung der vorliegenden Untersuchung zu aufrichtigem Dank verpflichtet.

## Linsengleichung und Bildkurve des Zylinder-Kondensators bei schiefem Ein- und Austritt der Ionenbündel an den Feldgrenzen

Von H. WENDE \*

Aus dem Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz

(Z. Naturforschg. 12 a, 967—970 [1957]; eingegangen am 23. September 1957)

Die ionenoptische Linsengleichung des Zylinderkondensators wird mittels der Theorie zweiter Näherung auf den Fall schiefen Ein- und Austritts an den Feldgrenzen verallgemeinert. Es werden Angaben über die Lage der Bildkurve und die Eigenschaften eines „Energie-Spektrographen“ gemacht.

Seit den grundlegenden Arbeiten von HERZOG<sup>1</sup> über elektrische Sektorfelder weiß man, daß diese sich gegen Ionen- bzw. Elektronenstrahlen ähnlich wie Linsen (und Prismen) gegen Lichtstrahlen verhalten und einer Linsengleichung

$$(l'_e - g_{e0})(l''_e - g_{e0}) = f_{e0}^2, \quad (1)$$

$$g_{e0} = r_e \frac{\sqrt{2}}{2} \cot \sqrt{2} \Phi_e, \quad (1a)$$

$$f_{e0} = r_e \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{\sin \sqrt{2} \Phi_e} \quad (1b)$$

genügen (s. Abb. 1). Da diese Rechnungen für den Zylinderkondensator in erster Näherung ausgeführt wurden, gilt die Gleichung nur in der Nähe des Mittelstrahls bei nahezu senkrechtem Ein- und Austritt an den Feldgrenzen. Nach Gl. (1) existiert eine Bildebene, welche die Mittelbahn im Abstand  $l''_e$  von der hinteren Feldgrenze schneidet. Über den Winkel, den diese Bildebene mit der Mittelbahn bildet, kann die Theorie erster Näherung ebenso-

wenig eine Aussage machen wie über das ionenoptische Verhalten bei schiefem Ein- und Austritt. Beim praktischen Arbeiten (z. B. dem Einjustieren

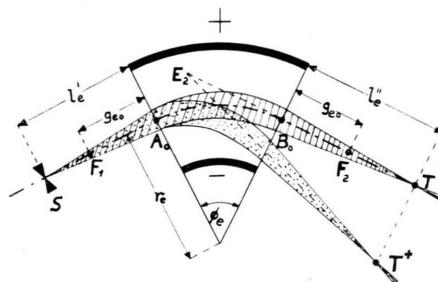


Abb. 1. Strahlengang im Zylinderkondensator für ein Bündel von Ionen zweier verschiedener Energien.

eines Massenspektrographen) hat man es sehr oft mit solchen schräg einfallenden Bündeln zu tun, so daß die Kenntnis ihrer ionenoptischen Eigenschaften sehr erwünscht ist. Seit einigen Jahren sind nun

\* Die vorliegende Arbeit enthält wesentliche Bestandteile der Dissertation von H. WENDE (D 77).

<sup>1</sup> R. HERZOG, Z. Phys. 89, 447 [1934].